3° μάθημα:

5/3/2019

π.χ. Να βρεθεί η Β.Ο.Π της $f(x)=\frac{1}{x}$ ορισμένης στο $[1,2]$ με την μέθοδο προσδιοριστέων συντελεστών.

Λύση: Έστω $P^*(x)=\alpha x+\beta$.

Η συνάρτηση σφάλμα είναι $e(x)=f(x)-P^*(x)=$

$$=\frac{1}{x}-(\alpha x+\beta)=\frac{1}{x}-\alpha x-\beta$$

$$e'(x)=-\frac{1}{x^2}-\alpha=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{\alpha} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}, \quad \alpha<0$$

Ακρότατα:

$$e(1)=1-\alpha-\beta$$

$$e\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\right)=\sqrt{-\alpha}-\frac{\alpha}{\sqrt{-\alpha}}-\beta=2\sqrt{-\alpha}-\beta, \quad e(2)=\frac{1}{2}-2\alpha-\beta$$

$$e(1)=-e\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\right)=e(2)$$

$$e(1)=e(2) \Leftrightarrow 1-\alpha-\beta=\frac{1}{2}-2\alpha-\beta \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$$

άρα $x=\frac{1}{\sqrt{-(-\frac{1}{2})}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\in[1,2]$

$$e(1)=e\left(\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\right) \Leftrightarrow 1-\alpha-\beta=\beta-2\sqrt{-\alpha} \Leftrightarrow 2\beta=1+\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \beta=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$P^*(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $e(1)=f(1)-P^*(1)=1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $e(\sqrt{2})=f(\sqrt{2})-P^*(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}-\left(-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}$
- $e(2)=f(2)-P^*(2)=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Άσκηση: Ποιο από τα πολυώνυμα αυτά $x^3-\frac{1}{8}x$ και $x^2-\frac{1}{8}$ δεν μπορεί να είναι β.ο.π. της $f(x)=x^4$ ορισμένης στο $[-1,1]$ στον P_3?

Λύση: Αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και το διάστημα που ορίζεται είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν τότε η β.ο.π. είναι άρτια ή περιττή αντίστοιχα. Άρα το πολυώνυμο $x^3-\frac{1}{8}x$ δεν μπορεί να είναι β.ο.π της $f(x)$.

Άσκηση: Ν.δ.ο. η β.ο.π. της $f(x)=\sin x+3x^2-5x+1$, ορισμένης στο διάστημα $[-2\pi,2\pi]$ στον P_2 είναι $P_2^*=3x^2-5x+1$.

Λύση: Αν η P_2^* είναι β.ο.π. της f στο $[-2\pi,2\pi]$, θα πρέπει η συνάρτηση $e(x)=f(x)-P_2^*(x)=\sin x$ να έχει εναλλ. σύνολο τεσσάρων σημείων.

$\left\{-2\pi+\frac{\pi}{2}, -2\pi+\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ είναι εναλλ. σύνολο σημείων

Άσκηση: $f(x)=x^3$ στο $[a,b]$ του P_3.

$f\in P_3 \Rightarrow P_3^*(x)=f(x)=x^3$ με σφάλμα $e(x)=0$.

Άσκηση: Δίνεται ότι P_n^* είναι η β.ο.π. της $f\in C[a,b]$ στο P_n. Να βρεθεί η β.ο.π. της $f+q_n$ στον P_n, όπου $q_n\in P_n$.

Λύση: $e(x)=f(x)-P_n^*(x) \rightsquigarrow$ έχει εναλλ. σύνολο $n+2$ σημείων στο $[a,b]$. Ελέγχουμε αν $P_n^*+q_n$ είναι β.ο.π. της $f+q_n$

$e(x)=f(x)+q_n(x)-\left(P_n^*(x)+q_n(x)\right)=f(x)-P_n^*(x)=e(x)$

$\rightsquigarrow$ έχει το ίδιο εναλλ. σύνολο.

Πολυώνυμα Chebyshev:

$T_n(x) = \cos(n\,\underbrace{\arccos(x)}_{\theta})$, όπου $x = \cos\theta$

$\cos((n+1)\cdot\theta) - \cos((n-1)\cdot\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\cdot\theta)$ τριγωνική ανισότητα

$\Leftrightarrow T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x \cdot T_n(x)$

$\Leftrightarrow T_{n+1}(x) = 2x\cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$

$T_0(x) = \cos 0 = 1$, $T_1(x) = \cos\theta = x$

$T_2(x) = 2x\cdot T_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x\cdot T_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2x\cdot T_3(x) - T_2(x) = 2x\cdot(4x^3-3x) - (2x^2-1) =$
$= 8x^4 - 8x^2 + 1$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, T_n(x)\cdot T_m(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,[T_n(x)]^2\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{αν } n \geq 1 \\ \pi, & \text{αν } n = 0 \end{cases}$$

Το $T_n(x)$ έχει εναλλασσόμενο σύνολο από $n+1$ σημεία στο $[-1,1]$.

$x_j = \cos\frac{j\pi}{n}$, $n = 0, 1, \dots, n$

$T_n(x_j) = \cos\left(n\frac{j\pi}{n}\right) = \cos(j\pi) = (-1)^j$

min max ιδιότητα:

$$\min \max |P(x)| = \frac{|c|}{2^{n-1}} \cdot |T_n(x)| = \frac{c}{2^{n-1}}$$

όπου P_n^c το σύνολο πολυωνύμων n βαθμού με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το c.

$\frac{c}{2^{n-1}} T_n(x) \in P_n^c$, ο συντελεστής μεγιστοβάθμιου όρου του $T_n(x)$ είναι 2^{n-1}.

$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x)$

Έστω $p \in P_{n+1}^c$ και P_n^* η β.ο.π. στον P_n, στο $[-1,1]$ $e(x) = P(x) - P_n^*(x) \in P_{n+1}^c$

Τότε η συνάρτηση σφάλμα είναι $e(x) = P(x) - P_n^*(x) \in P_{n+1}^c$

Τότε η συνάρτηση σφάλμα θα έχει εναλλ. σύνολο σημείων από $n+2$ σημεία στο $[-1,1]$

Το $\frac{c}{2^n} T_{n+1}(x) \in P_{n+1}^c$ έχει εναλλ. σύνολο από $n+2$ σημεία στο $[-1,1]$ άρα $e(x) = \frac{c}{2^n} T_{n+1}(x)$.

$\frac{c}{2^n} T_{n+1}(x) = P(x) - P_n^*(x) \Leftrightarrow P_n^*(x) = P(x) - \frac{c}{2^n} T_{n+1}(x)$

$P_n^* = x^{n+1} - \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) \in P_{n-1}$.

$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$ Άρα, τα πολυώνυμα chebyshev έχουν μόνο άρτιες ή περιττές δυνάμεις του x.

$P_3^*(x) = x^4 - \frac{1}{2^3} \cdot T_4(x) = x^4 - \frac{1}{8}(8x^4 - 8x^2 + 1) = x^2 - \frac{1}{8} = P_2^*(x)$

Αν το p ορίζεται στο $[a,b]$, μετασχηματίζουμε με γραμμικό μετασχηματισμό το $[a,b]$ στο $[-1,1]$

$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{b+a}{2}$

$q(t) = p(x(t))$, $t \in [-1,1]$ Βρίσκουμε τη β.ο.π. $q_n^* \in P_n$ και μετασχηματίζουμε με τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$P_n^*(x) = q_n^*(t(x))$ $\quad t = \frac{a}{b-a} x - \frac{b+a}{b-a}$

Άσκηση: Να βρεθεί η β.ο.π. της x^2 ορισμένης στο $[0,1]$ στο P_1.

Λύση: $p(x) = x^2$, $x = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}$

$$q(t) = p(x(t)) = \left[\tfrac{1}{2}(t+1)\right]^2 = \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4}, \ t \in [-1,1]$$

$$q_1^*(t) = q(t) - \frac{c}{2} T_2(t) = \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{2}(2t^2 - 1) =$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{3}{8}, \quad t = 2x - 1.$$

$$p_1^*(x) = q_1^*(t(x)) = \frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{8} = x - \frac{1}{8}$$